補足 — 密度関数（または，確率密度関数）

一様分布 (Uniform Distribution)：確率変数 X は a と b の間の値をとる。このとき，確率変数 X の密度関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \text{ について} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。ただし，$a < b$ とする。

密度関数になるための条件（講義ノート P.67，2,3 行）を確認する。

- $f(x) \geq 0$ （明らか）

- $\int f(x)\mathbf{d}x = 1 \implies \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbf{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathbf{d}x = \Big[\frac{1}{b-a}x\Big]_a^b = 1$

指数分布 (Uniform Distribution)：確率変数 X は 0 より大きい値をとる。このとき，確率変数 X の密度関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \text{ について} \\ 0 & x \le 0 \text{ について} \end{cases}$$

となる。ただし，$\lambda > 0$ とする。

密度関数になるための条件（講義ノート P.67，2,3 行）を確認する。

- $f(x) \ge 0$ **（明らか）**

- $\int f(x)\mathbf{d}x = 1 \implies \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbf{d}x = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{d}x = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = 1$

(*) $y = e^x$ **のとき，** $\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = e^x$
(**) $y = f(g(x))$ **のとき，** $\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = g'(x)f'(g(x))$

正規分布 (Normal Distribution)： **確率変数** X **は** $-\infty$ **から** ∞ **の値をとる。このとき，確率変数** X **の密度関数** $f(x)$ **は，**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

となる。

密度関数になるための条件（講義ノート P.67，2,3 行）を確認する。

- $f(x) \geq 0$ （明らか）
- $\displaystyle\int f(x)\mathbf{d}x = 1$ （証明略，かなり難しい）

(*) $e^x = \exp(x)$

カイ二乗分布 (Chi-square Distribution)： 確率変数 X は 0 より大きい値をとる。このとき，確率変数 X の密度関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})} 2^{-\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} & x > 0 \text{ について} \\ 0 & x \leq 0 \text{ について} \end{cases}$$

となる。ただし，$t > 0$ について，$\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\mathbf{d}x$ とする（ガンマ関数と呼ばれる）。

自由度 k のカイ二乗分布（$\chi^2(k)$ 分布）と呼ばれる。

密度関数になるための条件（講義ノート P.67，2,3 行）を確認する。

- $f(x) \geq 0$ （明らか）
- $\displaystyle\int f(x)\mathbf{d}x = 1$ （証明略，かなり難しい）

t 分布 (t Distribution)：確率変数 X は $-\infty$ から ∞ の値をとる。このとき，確率変数 X の密度関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\Big(1 + \frac{x^2}{k}\Big)^{-\frac{k+1}{2}}$$

となる。ただし，$k > 0$ である。

自由度 k の t 分布（$t(k)$ 分布）と呼ばれる。

密度関数になるための条件（講義ノート P.67，2,3 行）を確認する。

- $f(x) \geq 0$ （明らか）
- $\displaystyle\int f(x)\mathbf{d}x = 1$ （証明略，かなり難しい）

F 分布 (F Distribution)： 確率変数 X は $-\infty$ から ∞ の値をとる。このとき，確率変数 X の密度関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\Big(\dfrac{m}{n}\Big)^{\frac{m}{2}} \dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+\frac{m}{n}x)^{\frac{m+n}{2}}} & x > 0 \text{ について} \\ 0 & x \leq 0 \text{ について} \end{cases}$$

となる。ただし，$m > 0$，$n > 0$ である。

自由度 m，n の F 分布（$F(m,n)$ 分布）と呼ばれる。

密度関数になるための条件（講義ノート P.67，2,3 行）を確認する。

- $f(x) \geq 0$ （明らか）
- $\displaystyle\int f(x)\mathbf{d}x = 1$ （証明略，かなり難しい）

4.2　期待値 (P.52)

確率変数 X **のある関数：** $g(X)$

定義：

$g(X)$ **の期待値** $\mathbf{E}(g(X))$**：**

$$
\mathbf{E}(g(X)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_i g(x_i)p_i = \sum_i g(x_i)f(x_i), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{離散型確率変数} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathbf{d}x, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{連続型確率変数} \end{cases}
$$

1. 確率変数 X の平均 $\mathbf{E}(X)$

$\Longrightarrow$ X **の期待値,** $g(X) = X$

$$\mathbf{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_i x_i f(x_i), & \text{離散型確率変数} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathbf{d}x, & \text{連続型確率変数} \end{cases}$$

$$= \mu, \quad (\text{または，} \mu_x)$$

2. 確率変数 X の分散 $\mathbf{V}(X)$

$\Longrightarrow$ $(X-\mu)^2$ **の期待値,** $g(X) = (X-\mu)^2$

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X-\mu)^2)$$

$$
= \begin{cases} \displaystyle\sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i), \\ \qquad\qquad \text{離散型確率変数} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\mathbf{d}x, \\ \qquad\qquad \text{連続型確率変数} \end{cases}
$$

$$
= \sigma^2, \quad \textbf{(または，}\sigma_x^2\textbf{)}
$$

確率変数 X の分散 $\mathbf{V}(X)$

$\Longrightarrow X$ の確率分布の確率関数 (離散型の場合)，または，確率密度関数 (連続型の場合) の範囲が広ければ，$\mathbf{V}(X)$ は大きい。

いくつかの公式：

1. a, b **を定数とする。**

   定理 4.1 (P.54)： $\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$

   証明：

   X **が離散型確率変数の場合，**

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(aX + b) &= \sum_i (ax_i + b) f(x_i) \\ &= a \sum_i x_i f(x_i) + b \sum_i f(x_i) \\ &= a\mathbf{E}(X) + b\end{aligned}$$

   途中で， $\sum_i f(x_i) = 1$ **に注意**

X **が連続型確率変数の場合，**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)\mathbf{d}x \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathbf{d}x \\
&\quad + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbf{d}x \\
&= a\mathbf{E}(X)+b
\end{aligned}
$$

途中で， $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbf{d}x = 1$ **に注意**

2. 定理 4.2 (P.55)： $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mu^2$

証明：

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X-\mu)^2)$$

$$= \mathbf{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

$$= \mathbf{E}(X^2) - 2\mu\mathbf{E}(X) + \mu^2$$

$$= \mathbf{E}(X^2) - \mu^2$$

途中で，$\mu = \mathbf{E}(X)$ に注意

3. a, b を定数とする。

定理 4.3 (P.55)： $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$

証明：

$\mathbf{E}(aX + b) = a\mu + b$ に注意して，

$$\mathbf{V}(aX + b) = \mathbf{E}\Big(((aX + b) - \mathbf{E}(aX + b))^2\Big)$$

$$= \mathbf{E}\Big((aX - a\mu)^2\Big)$$

$$= \mathbf{E}(a^2(X-\mu)^2)$$

$$= a^2\mathbf{E}((X-\mu)^2)$$

$$= a^2\mathbf{V}(X)$$

を得る。

例：サイコロ投げ

確率分布：

X の取る値	x_1 **1**	x_2 **2**	x_3 **3**	x_4 **4**	x_5 **5**	x_6 **6**	計
その確率	p_1 $\frac{1}{6}$	p_2 $\frac{1}{6}$	p_3 $\frac{1}{6}$	p_4 $\frac{1}{6}$	p_5 $\frac{1}{6}$	p_6 $\frac{1}{6}$	**1**

平均：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{i=1}^{6} x_i p_i \\
&= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} \\
&+ 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

分散：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X^2) &= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i \\
&= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} \\
&+ 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{91}{6}$$

を利用して，

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}(X^2) - \mu^2 \\ &= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}\end{aligned}$$

その他：

1. **標準偏差：** $\sigma = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$

2. **確率変数** X **の標準化 (基準化)：** $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

3. 定理 4.4 (P.56)： $\mathbf{E}(Z) = 0$, $\mathbf{V}(Z) = 1$

証明：

定理 4.1 (P.54), 定理 4.3 (P.55) について， $a = \frac{1}{\sigma}$, $b = -\frac{\mu}{\sigma}$ **のケースを考える。**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z) &= \mathbf{E}(\frac{X-\mu}{\sigma}) \\
&= \frac{1}{\sigma}\mathbf{E}(X-\mu) \\
&= \frac{1}{\sigma}(\mathbf{E}(X)-\mu) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(Z) &= \mathbf{V}(\frac{X-\mu}{\sigma}) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{V}(X) \\
&= 1
\end{aligned}
$$