

# 粒子フィルターの応用 (チュートリアル「マクロ時系列分析」)

矢野浩一  
駒澤大学

2013 年度日本経済学会春季大会  
富山大学 (2013 年 6 月 23 日)

# 粒子フィルター (モンテカルロフィルター) (1)

ほぼ同時期にほぼ同じアルゴリズムが独立に提唱された。

- ▶ Kitagawa [北川源四郎先生] (1996): Monte Carlo filter
- ▶ Gordon et al. (1993): Bootstrap filter
- ▶ Doucet et al. (2001): Particle filter
- ▶ Others: Sequential Monte Carlo method

個人的には「モンテカルロフィルター」と呼びたいが、近年「粒子フィルター (もしくはパーティクルフィルター)」という呼び名が普及したため、今日は「粒子フィルター」で用語を統一する。

## 粒子フィルター（モンテカルロフィルター）（2）

モンテカルロフィルター（粒子フィルター）を専攻することになった経緯：

- ▶ 2001年に北川先生の共同研究者である佐藤整尚先生（東京大学）とお会いしてモンテカルロフィルター（粒子フィルター）について学んだのがこの分野を始める切っ掛け
- ▶ 2003年に総合研究大学院大学（統計数理研究所）博士課程に進学し、モンテカルロフィルター（粒子フィルター）を専攻。
- ▶ 2007年に博士号（統計科学）をいただき、現在に至る

いつも「モンテカルロフィルター（粒子フィルター）の宣伝担当者」であろうと思っていますので、このような機会を与えていただいた先生方に心より感謝を申し上げます。

## 粒子フィルター（モンテカルロフィルター）（3）

Kalman (1960) によって提案されたカルマンフィルターと粒子フィルターの特色を比較する：

	状態空間モデル	計算負荷
カルマン	線形・ガウス (非定常)	(比較的) 小
粒子	非線形・非ガウス (非定常)	大

粒子フィルターはモンテカルロ法に依るため、カルマンフィルターよりも比較的計算負荷は大きいですが、非線形・非ガウスモデルを扱うことができる点にメリットがある。

## 条件付き確率 (1) : 問題

問題：不況の確率

「A国のちょっといい加減な政府」が財政政策を行う場合を考える。今年2011年であり、A国の経済は9年後の2020年になったら、

- ▶  $\frac{2}{3}$  の確率で好況になり、 $\frac{1}{3}$  の確率で不況になる

とする。それに対して政府は以下のように財政政策を実行する。

- ▶ 好況の場合、 $\frac{1}{4}$  の確率で財政政策を実行する
- ▶ 不況の場合、 $\frac{4}{5}$  の確率で財政政策を実行する

## 条件付き確率 (2)

問題文では分かりにくいいため、設定を2項ツリーで書くと以下のようになる。不況である確率は当然 $\frac{1}{3}$ 。

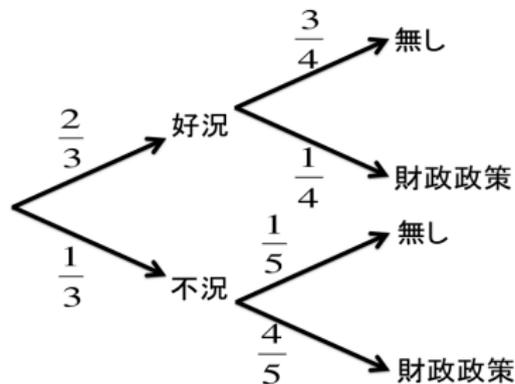
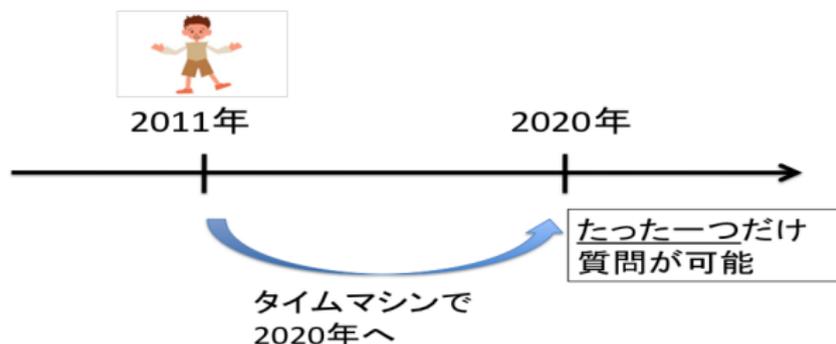


Figure:

## 条件付き確率 (3)

このような状況設定の下で、「2020年に行くことができるタイムマシン」が開発された。ただし、このタイムマシンは不完全で、行った先で現地の人（2020年に生活している）にたった一つしか質問ができない。



## 条件付き確率（4）

そこであなたは「現在、政府は財政政策を行っていますか？」とだけ聞くことにした。

問題：不況の確率

タイムマシンで、2020年に行ったとき、出会った人に「現在、政府が財政政策を行なっていますか」と聞いたところ、「財政政策を行っていますよ」という返事だった。この条件のもとで、「A国の経済が不況である確率」はいくらか？ただし、出会った相手は嘘はつかないものとする。

## 条件付き確率 (5)

問題だけを聞くと複雑そうだが、それを2項ツリーで表すとそれほど複雑ではない。「青枠で囲った部分に到達できる矢印」だけが考えるべきこと。

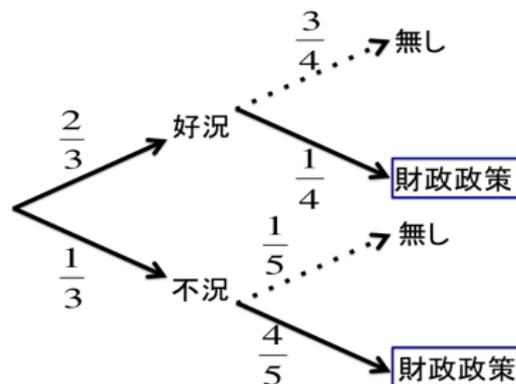


Figure:

## 条件付き確率 (6)

「財政政策を行っていますよ」という返事だったときに「A国の経済が不況である確率」を  $P(\text{不況} | \text{財政})$  と書くとする、条件付き確率の定義から

$$P(\text{不況} | \text{財政}) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5}} = \frac{8}{13} \quad (1)$$

質問をする前には  $\frac{1}{3}$  だった「不況である確率」が、  
「回答を得た後」には  $\frac{8}{13}$  に上昇している！

## 条件付き確率 (7)

質問をする前には  $\frac{1}{3}$  だった「不況である確率」が、「回答を得た後」には  $\frac{8}{13}$  に上昇している理由は、タイムマシンで未来に行き、「新しい情報 (つまり『財政政策を行っている』という情報が得られた) からに他ならない。

条件付き確率はこのように面白く、なおかつ有用！(少なくともそのように見える)

## ベイズの定理 (1) : 教科書でよくみる定式化

ベイズの定理は以下の式で表わされる :

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbb{P}(\mathbf{Y})} \quad (2)$$

ここで  $\mathbf{Y}$  は観測データ、 $\boldsymbol{\theta}$  はパラメーターである。 $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta})$  を事前分布、 $\mathbb{P}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})$  を尤度、 $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$  を事後分布、 $\mathbb{P}(\mathbf{Y})$  を規格化定数と呼ぶ。規格化定数を無視して書くと :

$$\text{(事後分布)} \propto \text{(尤度)} \times \text{(事前分布)}$$

事後分布が最大になるような推定を

ベイズ推定

という。

## ベイズ統計学と伝統的統計学の違い

- ▶ ベイズ統計学→パラメーターは分布で表わされる→ $p(\theta)$
- ▶ 伝統的「頻度主義」統計学→パラメーターは点であって分布ではない (ただし、推定誤差は存在する) → $\theta$

## ベイズの定理 (2): 謎の事前分布

一番重要な課題は (事前分布) を

### いかに適切に設定するか？

であるが、「観測データがないのに、予めパラメーターに関して『何か分かっている』とはどういうことか？」という疑問が常にベイズ統計学には付きまとう。(SVモデルの説明で事前分布が不十分な場合の実例を示す)

## ベイズの定理 (3) : 時間に依存する定式化

ベイズの定理を時間に依存する recursive 形式に直す :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\theta}_t) \mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}_t | \mathbf{Y}_{1:(t-1)})}{\mathbb{P}(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{1:(t-1)})}, \quad t \geq 1, \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\theta}_t) \mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}_t | \boldsymbol{\theta}_{t-1}) \mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}_{t-1} | \mathbf{Y}_{1:(t-1)})}{\mathbb{P}(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{1:(t-1)})}\end{aligned}\quad (3)$$

ここで  $\mathbf{Y}_t$  は観測データ、 $\boldsymbol{\theta}_t$  は状態である。 $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}_t | \mathbf{Y}_{1:(t-1)})$  を事前分布、 $\mathbb{P}(\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\theta}_t)$  を尤度、 $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}_t | \mathbf{Y}_t)$  を事後分布、 $\mathbb{P}(\mathbf{Y}_{1:t})$  を規格化定数という。前に算出した  $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}_{t-1} | \mathbf{Y}_{1:(t-1)})$  に対して、ベイズの定理を用いて  $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}_t | \mathbf{Y}_{1:t})$  を「繰り返し計算」する (最初の事前分布が良くなくても繰り返し計算で解決)。

## 線形・ガウス型・定常状態空間モデル

以下、状態  $\theta_t$  を  $\mathbf{x}$  と表記し、我々がこれから考える問題を線形・ガウス型状態空間モデルで定式化すると以下のようになる：

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_t &= \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \\ \mathbf{x}_t &= \mathbf{F}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t,\end{aligned}\tag{4}$$

ここで、 $\mathbf{Y}_t$  は観測値のベクトル、 $\mathbf{x}_t$  は状態ベクトル、 $\boldsymbol{\epsilon}_t$  と  $\mathbf{v}_t$  はノイズベクトルである。式(4)の上式を観測方程式、式(4)の下式をシステム方程式と呼ぶ。課題は観測値  $\mathbf{Y}_t$  ( $t = \{1 \cdots T\}$ ) を与えた時に

**適切な状態ベクトル  $\mathbf{x}_t$  を推定する**

## 非線形・非ガウス・非定常状態空間モデル

さらに線形・ガウス状態空間モデルを一般化した非線形・非ガウス・非定常状態空間モデルは以下の形で定式化される：

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t &= h_t(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\xi}_m) + \boldsymbol{\epsilon}_t, \\ \mathbf{x}_t &= f_t(\mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\xi}_s) + \mathbf{v}_t, \end{aligned} \tag{5}$$

ここで、 $\mathbf{Y}_t$  は観測値のベクトル、 $\mathbf{x}_t$  は状態ベクトル、 $\boldsymbol{\epsilon}_t$  と  $\mathbf{v}_t$  はノイズベクトル、 $\boldsymbol{\xi}_s$  と  $\boldsymbol{\xi}_m$  は未知のパラメーターである。式(5)の上式を観測方程式、式(5)の下式をシステム方程式と呼ぶ。こちらも課題は同じで観測値  $\mathbf{Y}_t$  ( $t = \{1 \dots T\}$ ) を与えた時に

**適切な状態ベクトル  $\mathbf{x}_t$  を推定する**

## 状態空間モデルの図示

観測可能なデータ  $Y_t$  を用いて観測不可能な変数 = 状態  $X_t$  を推定

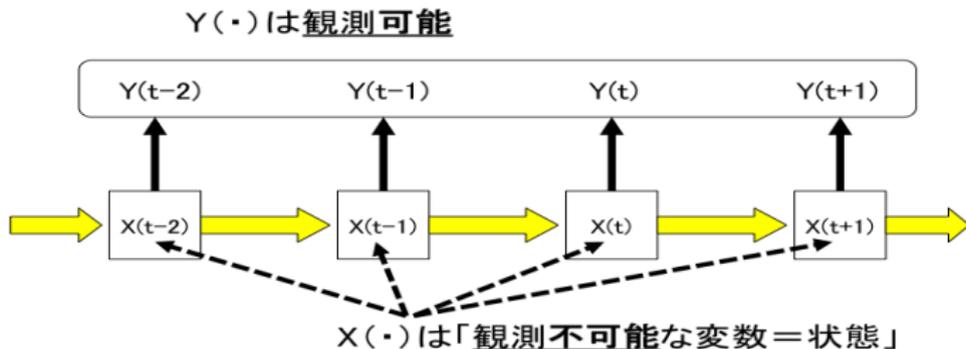
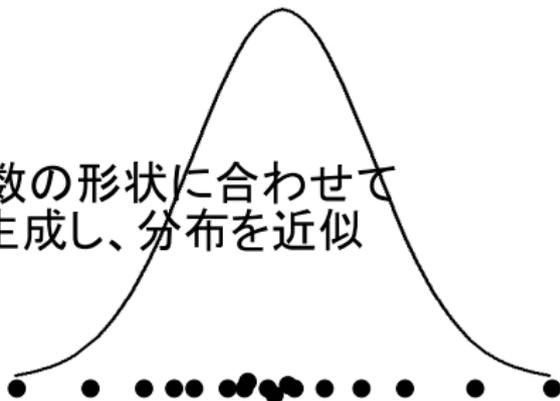


Figure: 状態空間モデル

## 粒子フィルターのアイデア (1)

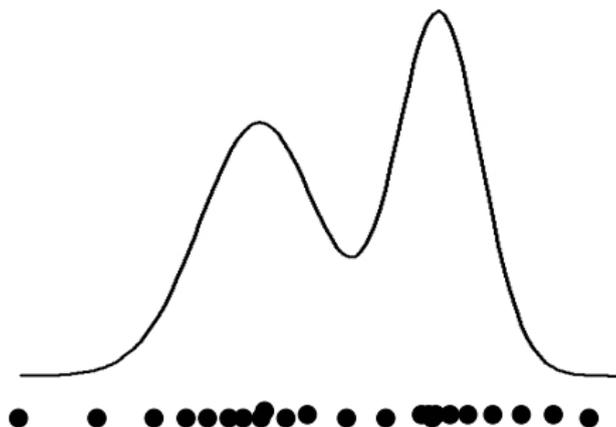
確率の高いほど粒子が多くなるようにして分布を近似

密度関数の形状に合わせて  
粒子を生成し、分布を近似



## 粒子フィルターのアイデア (2)

複雑な分布も **比較的容易に近似可能**



(説明のため可能であれば、黒板に図を書く)

# 粒子フィルターの出発点 (1)

用語の定義：

$$\begin{aligned} \text{予測分布： } & \mathbb{P}(\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_{1:(t-1)}) \\ \text{フィルター分布： } & \mathbb{P}(\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) \end{aligned} \quad (6)$$

また、 $\theta_t$  を時系列解析では状態  $\mathbf{x}_t$  と書くので、記号を置き換えて、ベイズの定理は以下のようにあらわされる。

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) \propto \mathbb{P}(\mathbf{Y}_t | \mathbf{x}_t) \mathbb{P}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) \mathbb{P}(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{Y}_{1:(t-1)}) \quad (7)$$

粒子フィルターはベイズの定理を用いて状態を推定するアルゴリズムである。注：以下、誤解が生じない範囲で積分記号を省略することがある。

## 粒子フィルターの出発点 (2)

まず、分布の近似する方法を考える。すでに説明したとおり、「粒子 (モンテカルロ試行)」を使って、分布を近似する (正しくは「分布の期待値」を求めている) :

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) \sim \frac{1}{\sum_{m=1}^M w_t^m} \sum_{m=1}^M w_t^m \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^m), \quad (8)$$

ここで  $\mathbf{Y}_{1:t}$  は時間 1 から時間  $t$  までの観測データ、 $\delta$  はディラックのデルタ関数、 $w_t^m$  は粒子  $\mathbf{x}_t^m$  の重み (後述)。

## 粒子フィルターの導出 (1)

粒子で近似した事前分布をベイズの定理に入れて、ディラックのデルタ関数の性質を使って、予測分布  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_{1:(t-1)})$  を計算

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_{1:(t-1)}) &= \int p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{Y}_{1:(t-1)}) d\mathbf{x}_{t-1} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M p(\mathbf{x}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t-1}^m) \\ &\simeq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^m). \end{aligned} \tag{9}$$

$\mathbf{x}_t^m$  は以下の式に従ってモンテカルロ法で生成する。

$$\mathbf{x}_t^m \sim p(\mathbf{x}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t-1}^m). \tag{10}$$

## 粒子フィルターの導出 (2)

式 (9) を式 (7) に代入して、以下のようにフィルター分布  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_{1:t})$  を得る。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) &\propto p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_{1:(t-1)}) \\ &\propto \frac{1}{M} p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{x}_t) \sum_{m=1}^M \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^m) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{x}_t^m) \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^m). \end{aligned} \quad (11)$$

式 (8) と式 (11) を比較すると、「粒子の重み」  $w_t^m$  とは 1 ステップごとの尤度に比例して生成すればよいと分かる。

$$w_t^m \propto p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{x}_t^m). \quad (12)$$

## 粒子の重みとリサンプリング

この後、「粒子の重み」に比例して、リサンプリング（復元抽出）を行う（これは粒子があまりに拡散してしまうことを防ぐため。条件次第でリサンプリングを行わない場合も）。リサンプリング後、粒子の重みは  $1/M$  に規格化される。

- ▶ 教訓：「事後分布を最大化する粒子だけではなく、必ずしもそうでもない粒子も少し残しておく」（「今日の劣等生も、環境が変わると優等生かもしれない」。NTT 民営化の時の人事部長の経験）

## 粒子フィルターまとめ

Kitagawa (1993, 1996) や Gordon et al. (1993) によって提案されたモンテカルロフィルターは状態ベクトル  $\mathbf{x}_t$  を推定するアルゴリズム

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_t^m &\sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^m, \xi_s), \\ w_t^m &\sim p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{x}_t^m), \\ p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_t) &\sim \sum_{m=1}^M w_t^m \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^m).\end{aligned}\tag{13}$$

粒子は各ステップで  $w_t^m$  に応じてリサンプリングされる。

# モンテカルロフィルターの尤度関数と問題点

Kitagawa (1996) はモンテカルロフィルターの尤度関数は以下の形で定式化した。

$$\log L(\theta) \simeq \sum_{t=1}^T \log \left( \sum_{m=1}^M w_t^m \right) - T \log M, \quad (14)$$

ここで  $T$  は観測データ数である。問題は Newton 法などの微分成分を必要とする関数最適化アルゴリズムが使えない点。

## 拡張状態ベクトル (1)

Kitagawa (1998) によって拡張状態ベクトル (Augmented State Vector (ASV)  $\mathbf{z}_t$ ) と自己組織化状態空間モデルが提案された。ASV は以下のように定義される。

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

このフレームワークではパラメーターも状態の一部として扱われ、MCF を用いて同時推定される。

## 拡張状態ベクトル (2)

既に述べた通り、ベイズの定理では (1) パラメーターの分布、(2) 状態の分布を扱うことができる。ASV はその 2 つを組み合わせ、「パラメーターと状態の同時分布  $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{Y}_{1:t})$ 」を考えている。状態  $\mathbf{x}_t$  とパラメーター  $\theta$  の分布は  $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{Y}_{1:t})$  の周辺分布を計算することで得られる。

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) = \int p(\mathbf{z}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) d\theta \quad (16)$$

$$p(\theta | \mathbf{Y}_{1:t}) = \int p(\mathbf{z}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t \quad (17)$$

# 自己組織化状態空間モデル (1)

自己組織化状態空間モデルは以下のように定義される。

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_t &= F(\mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{v}_t, \boldsymbol{\xi}_s), \\ \mathbf{Y}_t &= H(\mathbf{z}_t, \boldsymbol{\epsilon}_t, \boldsymbol{\xi}_o),\end{aligned}\tag{18}$$

ここで

$$F(\mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{v}_t, \boldsymbol{\xi}_s) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t, \boldsymbol{\xi}_s) \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$

$$H(\mathbf{z}_t, \boldsymbol{\epsilon}_t, \boldsymbol{\xi}_o) = h(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\epsilon}_t, \boldsymbol{\xi}_o).$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\xi}_s, \boldsymbol{\xi}_o]'$$

## 自己組織化状態空間モデル (2)

DSGE のパラメーターは時変係数として推定する。Random walk prior を仮定する。Random walk prior は以下の形で定式化される：

$$\tilde{\theta}_t = \tilde{\theta}_{t-1} + \mathbf{v}_t, \quad (19)$$

ここで  $\mathbf{v}_t \sim q(\mathbf{v}_t | \xi_s)$  (ここで  $q(\cdot)$  は正規分布に限定されず、 $t$  分布などのファットテールな分布であってもよいことに注意：この柔軟性がモンテカルロフィルターを採用するメリットの一つ)。ただし、 $\xi_s$  は対角化されているとする。

## 自己組織化状態空間モデル (3)

まとめると：

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_t &= F_t(\mathbf{z}_{t-1}, \boldsymbol{\epsilon}_t, \boldsymbol{\xi}_s), \\ \mathbf{Y}_t &= H_t(\mathbf{z}_t, \mathbf{v}_t, \boldsymbol{\xi}_o), \end{aligned} \tag{20}$$

ここで

$$F_t(\mathbf{z}_{t-1}, \boldsymbol{\epsilon}_t, \boldsymbol{\xi}_s) = \begin{bmatrix} f_t(\mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\epsilon}_{1,t}, \boldsymbol{\xi}_s) \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{t-1} + \boldsymbol{\epsilon}_{2,t} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$

ならびに

$$H_t(\mathbf{z}_t, \mathbf{v}_t, \boldsymbol{\xi}_o) = h_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t, \boldsymbol{\xi}_o)$$

ただし、 $\boldsymbol{\epsilon}_t = (\boldsymbol{\epsilon}_{1,t}, \boldsymbol{\epsilon}_{2,t})^t$ .

## 自己組織化状態空間モデル (4)

しかし、自己組織化状態空間モデルも完璧ではなく、パラメータの初期分布をどのように適切に選ぶべきかという問題が残っていた。Yano (2008) ではその問題を Nelder-Mead 法を用いて対数尤度関数最大化を通じてパラメータの初期分布を探索するアルゴリズムを提案した。

## 固定ラグ平滑化 (1)

Kitagawa (1996) は以下のようにベイズの定理を利用し、固定ラグ平滑化を提案している。

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{1:(t-1)})}{\mathbb{P}(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{1:(t-1)})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) \mathbb{P}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:(t-1)})}{\mathbb{P}(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{1:(t-1)})}. \end{aligned} \tag{21}$$

## 固定ラグ平滑化 (2)

固定ラグ平滑化は「状態ベクトルを拡張子、過去の粒子をただ保存する」だけで平滑化ができるため、計算負荷も増えず、簡易なアルゴリズムである。

ただし、固定ラグを大きく取り過ぎると粒子が縮退してしまうため、注意が必要である。

それ以外の平滑化については近年のサーベイを参照されたい。

## 粒子フィルターの派生系

粒子フィルターには多くの派生系が存在する。

- ▶ Auxiliary particle filter
- ▶ Rao-Blackwellised particle filter
- ▶ Merging particle filter
- ▶ Particle filter with MCMC moves
- ▶ Particle learning

今日取り上げられたのはこの分野のごくごく一部だけ。サーベイとしては

A. Doucet and A. M. Johansen. A Tutorial on Particle filtering and smoothing: Fiteen years later. In Oxford Handbook of Nonlinear Filtering, 2011, D. Crisan and B. Rozovsky (eds.). Oxford University Press 等

## 応用例

粒子の応用例は多いが、矢野が行った例だけでも以下の三分野がある。

1. 確率的ボラティリティへの応用 (Yano (2007))
2. 時変係数ベクトル自己回帰モデル (Yano (2008))
3. 動学的確率的一般均衡モデル (矢野・飯田・和合 (2011))

非線形・非ガウス・非定常状態空間モデルで表せるものであれば、大抵の場合、粒子フィルター＋自己組織化状態空間モデルで推定が可能であるため、様々な課題に適用可能である。

今回は確率的ボラティリティと動学的確率的一般均衡モデルへの応用を紹介する。

## 確率的ボラティリティモデル (1)

Taylor (1982) の SV モデルは以下の形で定式化される。

$$\begin{aligned}x_t &= \mu + \phi x_{t-1} + v_t, \\y_t &= \epsilon_t \exp\left(\frac{x_t}{2}\right),\end{aligned}\tag{22}$$

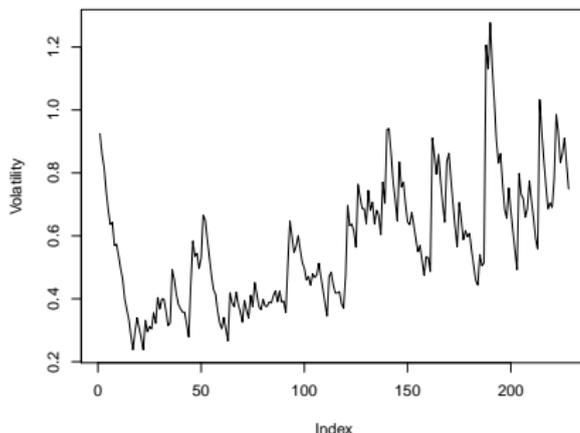
ここで  $v_t \sim N(0, \sigma_s^2)$ 、 $\epsilon_t \sim N(0, 1)$  であり、 $\mu, \phi$  は定数である。

### [実証]

2012年6月1日から2013年5月31日までの円ドル為替レートの日次収益率  $y_t$  で SV モデルを粒子フィルターと自己組織化状態空間モデルを用いてパラメーターを推定する。 $\mu, \phi, \sigma_s$  の推定結果はそれぞれ 0.0064、0.963、0.31 となった。

## 確率的ボラティリティモデル (2)

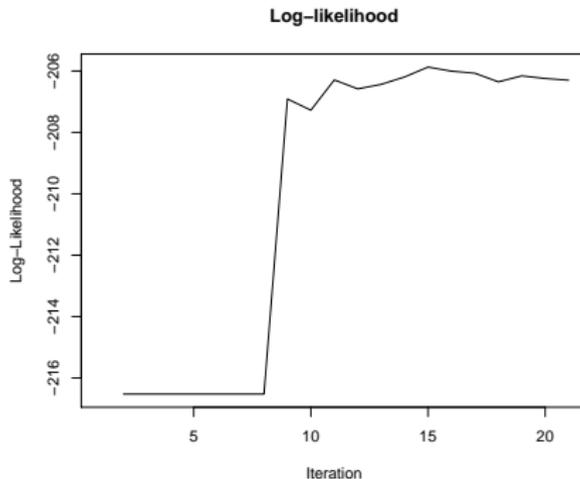
推定したボラティリティ  $x_t$  をグラフに表す。



先の衆議院解散の頃からボラティリティが高まっていることが分かる。

## 確率的ボラティリティモデル (3)

また、対数尤度の計算結果は以下の通り：



## DSGE モデルとゼロ金利制約 (1)

粒子フィルターを用いて DSGE モデル (ゼロ金利制約付き) を推定することも可能:

$$\hat{C}_t^R = \frac{h}{1+h} \hat{C}_{t-1}^R + \frac{1}{1+h} E_t \hat{C}_{t+1}^R - \frac{1}{1+h} E_t [\hat{i}_t - \hat{\pi}_{t+1}] + \epsilon_{C,t}. \quad (23)$$

$$\hat{\pi}_t = \frac{1}{1+\beta} \hat{\pi}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta} E_t \hat{\pi}_{t+1} + \frac{(1-\xi_p)(1-\beta\xi_p)}{\xi_p(1+\beta)} [(1-\alpha)\hat{W}_t + \alpha\hat{r}_t^K - \hat{Z}_t] + \epsilon_{\pi,t}. \quad (24)$$

$$\hat{W}_t = \sigma_C (\hat{C}_t^R - h\hat{C}_{t-1}^R) + \sigma_L \hat{L}_t + \epsilon_{W,t} \quad (25)$$

$$\hat{L}_t = -\hat{W}_t + \hat{r}^K + \hat{K}_t, \quad (26)$$

$$\hat{i}_t = \frac{1}{1+\beta} \hat{i}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta} \hat{i}_{t+1} + \frac{\nu}{1+\beta} \hat{Q}_t + \epsilon_{I,t}, \quad (27)$$

$$\hat{Q}_t = -E_t[\hat{i}_t - \pi_{t+1}] + \frac{1-\delta}{1-\delta+\bar{r}^K} E_t \hat{Q}_{t+1} + \frac{\bar{r}^K}{1-\delta+\bar{r}^K} E_t E_t \hat{r}_{t+1}^K + \epsilon_{Q,t}, \quad (28)$$

## DSGE モデルとゼロ金利制約 (2)

$$\hat{K}_t = (1 - \delta)\hat{K}_{t-1} + \delta\hat{I}_{t-1}, \quad (29)$$

$$\hat{Y}_t = \Psi_C \hat{C}_t + \Psi_I \hat{I}_t + \Psi_G \hat{G}_t, \quad (30)$$

$$\hat{Y}_t = \hat{Z}_t + \alpha \hat{K}_t + (1 - \alpha)\hat{L}_t, \quad (31)$$

$$(1 + \tau_C)\hat{C}_t^N = \frac{1 - \tau^d}{1 + \tau^w} \rho_{hm}(\hat{W}_t + \hat{L}_t) - \sigma_{hm} \hat{T}_{i,t}, \quad (32)$$

$$\hat{C}_t = (1 - \omega)\hat{C}_t^R + \omega\hat{C}_t^N, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \hat{G}_t + \rho_{Gb} \rho_{G\pi}(\hat{i}_t + \hat{b}_{t-1} - \pi_t) \\ &= \tau^d \rho_{GW}(\hat{W}_t + \hat{L}_t) + \tau^c \rho_{GC} \hat{C}_t + \tau^d \rho_{GK}(\hat{r}_t^K + \hat{K}_t) + \rho_{GT} \hat{T}_t + \rho_{Gb} \hat{b}_t. \end{aligned} \quad (34)$$

## DSGE モデルとゼロ金利制約 (3)

$$\hat{G}_t = \rho_G \hat{G}_{t-1} - \rho_{GY} \hat{Y}_t + \epsilon_{G,t}, \quad (35)$$

$$\hat{T}_t = \rho_T \hat{T}_{t-1} + \rho_{Tb} \hat{b}_t + \epsilon_{T,t}, \quad (36)$$

$$\hat{Z}_t = \xi_Z \hat{Z}_{t-1} + \epsilon_{Z,t}, \quad (37)$$

$$\hat{i}_t = \max[-(r^s + \pi^s), \rho_i \hat{i}_{t-1} + (1 - \rho_i)(\phi_Y \hat{Y}_t + \phi_\pi \hat{\pi}_t) + \epsilon_t^i] \quad (38)$$

where

$$\mathbf{x}_t = [E_t \hat{C}_{t+1}, E_t \hat{\pi}_{t+1}, E_t \hat{r}_{t+1}^K, E_t \hat{l}_{t+1}, E_t \hat{Q}_{t+1}, \hat{Y}_t, \hat{C}_t^R, \hat{l}_t, \hat{\pi}_t, \hat{W}_t, \hat{r}_t^K, \hat{Z}_t, \hat{L}_t, \hat{K}_t, \hat{l}_t, \hat{Q}_t, \hat{Y}_t, \hat{C}_t, \hat{G}_t, \hat{C}_t^N, \hat{T}_t, \hat{b}_t]$$

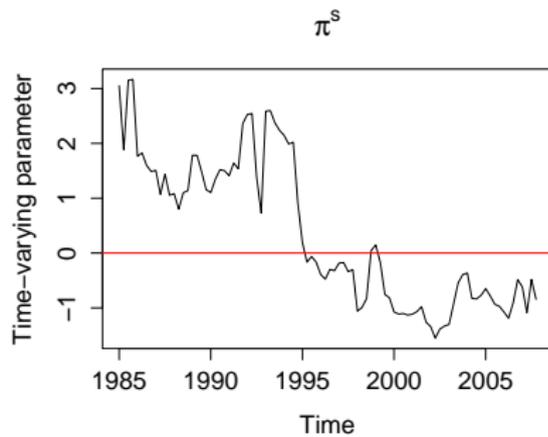
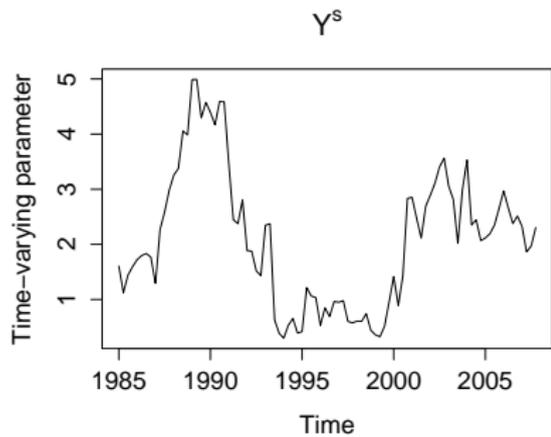


Figure: Time-varying Steady State

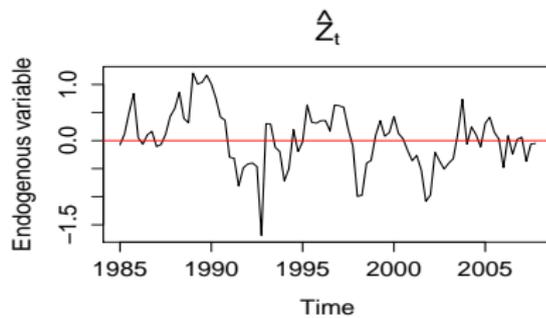
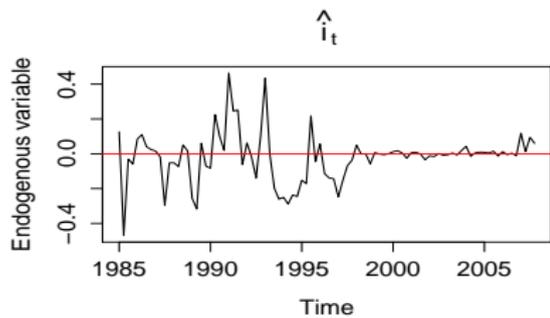
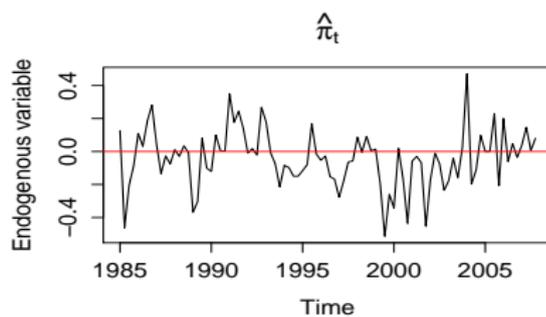
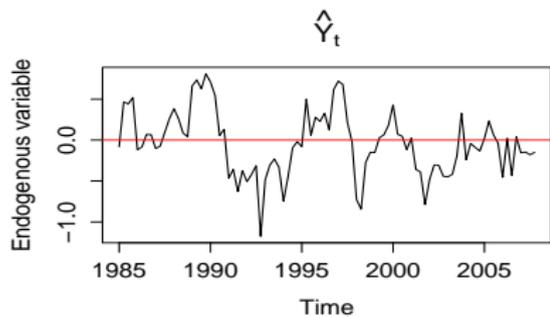


Figure: Endogenous variable

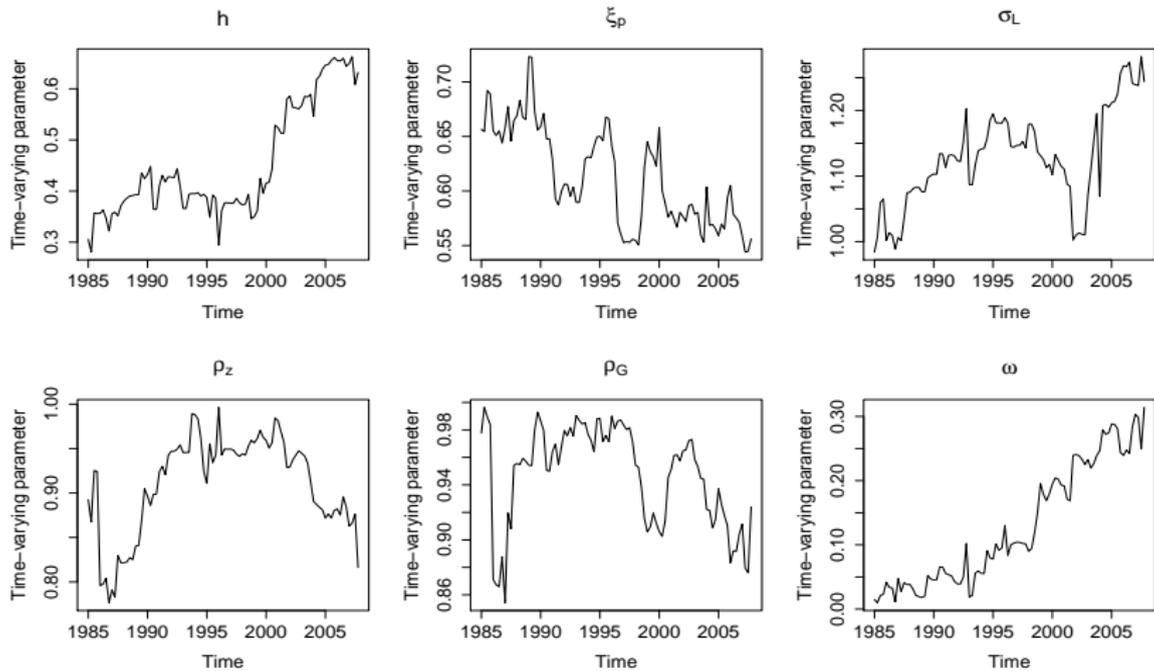


Figure: Time-varying parameter

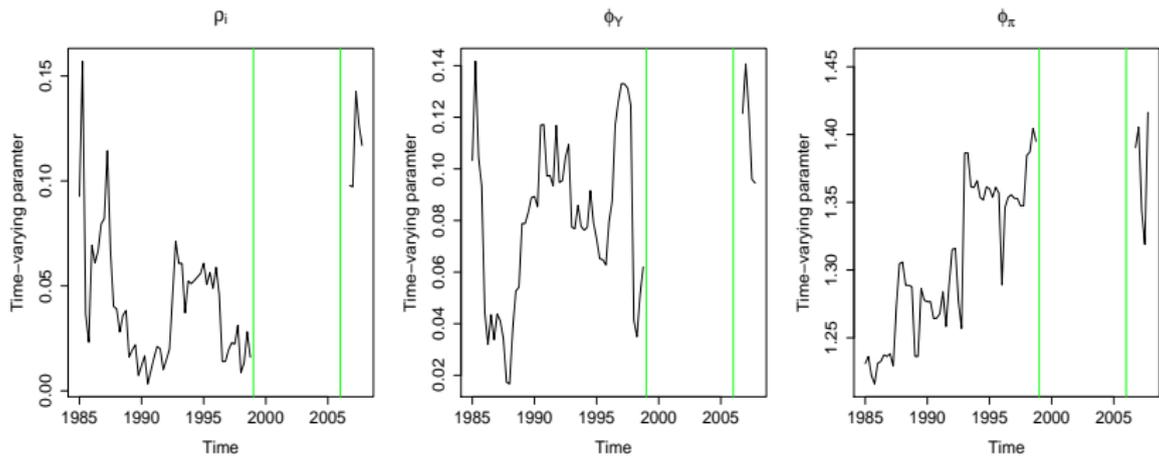


Figure: Time-varying parameter of the Taylor rule

## 課題

先ほどのスライドでは信用区間が描かれていない。現在、信用区間を適切に推定できるようにプログラムを改訂中である。

## 今日お話ししたこと

1. 問題意識
2. ベイズ統計学と状態空間モデル
3. 粒子フィルター（モンテカルロフィルター）
4. 応用例
5. まとめ

まだ、課題は多いのが現状ですが、興味がわいた方はぜひ元論文をご参照ください。

## 粒子フィルター応用の今後

粒子フィルター（モンテカルロフィルター）の応用の今後：

- ▶ すでに応用例は多くあるが、今後は更に（うんざりするほど）応用例が増えるはず
- ▶ 現在も理論的発展が続く：Sequential Monte Carlo Sampler など
- ▶ プログラムパッケージの整備（MCMCにおけるWinBUGSのようなパッケージソフトの開発が必要）
- ▶ 最近ではGPGPUを用いてシミュレーションするという意欲的な試みも

## 参考文献 (1)

- ▶ Doucet, A., and A. M. Johansen. (2011), "A Tutorial on Particle filtering and smoothing: Fiteen years later," In Oxford Handbook of Nonlinear Filtering, D. Crisan and B. Rozovsky (eds.). Oxford University Press.
- ▶ Gordon, N., D. Salmond, and A. Smith (1993), "Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation," IEEE Proceedings-F, 140, 107-113.
- ▶ Kitagawa, G., (1996), "Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models," Journal of Computational and Graphical Statistics, 5, 1-25.
- ▶ Kitagawa, G., (1998), "A self-organizing state-space model," Journal of the American Statistical Association, 93, 1203-1215.

## 参考文献 (2)

- ▶ 北川源四郎、(2005)、『時系列解析入門』、岩波書店（注：粒子フィルターの解説あり）
- ▶ 樋口知之編著、(2010)、『データ同化入門』、朝倉書店（注：カルマンフィルター・粒子フィルター等の包括的教科書）
- ▶ 矢野浩一・飯田泰之・和合肇、(2011)、『ゼロ金利制約下における日本経済—流動性制約家計を含むニューケインジアン DSGE モデル—』「世界同時不況と景気循環分析」（浅子和美, 宮川努, 飯塚信夫編、東京大学出版会）所収（注：粒子フィルターの動学的一般均衡均衡への適用例）