日本経済学会2010年度春季大会チュートリアルセッション（日本学術会議 数量的経済・政策分析分科会との共催)

「動学的マクロモデルの計量分析」

2010年6月5日

(1) ＤＳＧＥモデルの概要

藤原一平（日本銀行金融市場局)

(2) ＤＳＧＥおよびＤＳＧＥ-ＶＡＲモデルのＭＣＭＣベイズ分析

渡部敏明（一橋大学経済研究所)

動学的マクロモデルの計量分析

（1）DSGEモデルの概要

日本銀行･金融市場局
藤原　一平

本稿に示された内容は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。

報告の構成

- イントロダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー･ケインジアン･モデル
  - 解の唯一性
  - CEEモデル
- 今後の課題

- イントロダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー･ケインジアン･モデル
  - 解の唯一性
  - CEEモデル
- 今後の課題

報告の目的

- 中央銀行等の政策機関では、確率的動学一般均衡（Dynamic Stochastic General Equilibrium：DSGE）モデルを用いた経済予測、および、政策シミュレーションが、頻繁に行われている。
- 本報告の目的は、DSGEモデルの概要（すなわち、モデルの導出と解法）を理解すること。
- きわめて単純なモデルから、現実説明力の高いChristiano, Eichenbaum and Evans (JPE2005)モデルまでをフォロー。

マクロモデルの歴史

- ケインズ（ヒックス）のIS-LMモデル
- クラインによる大型ケインジアン・モデル
- DSGEモデル
  - リアル・ビジネス・サイクル・モデル
  - ニュー・ケインジアン・モデル

アカウンティング・ツールとしての理論モデル

- 全ての理論モデルは以下で表現可能。

「現在の変数」 ＝Ａ×「説明変数」+Ｂ×「期待変数」+「ショック」

- Ⓐパラメーター（A,B）選択、Ⓑ期待の評価、Ⓒショックの評価（説明変数選択）、のいずれかでどんな変数も説明できる。
- マクロ理論は、変数の動きを、Ⓐ 、Ⓑ 、Ⓒに分解（識別）するためのツール。

合理性（合理的期待）の仮定

（再掲）「現在の変数」
　＝Ａ×「説明変数」+Ｂ×「期待変数」+「ショック」

- 期待の評価（期待形成の仮定）次第で、どんな変数も説明できる。すなわち、期待に関するアド・ホックな仮定は、無数の可能性を提示する。
- 理論では、「スーパー・スマート」な個人が、全ての情報を吟味して、期待を形成し、行動を決定。このケースは、議論のベンチマークになる。

理論なき推定

- フィリップス曲線を単純に推定すると、中央銀行の政策スタンス次第で、ラグにかかるパラメーター（C）が変化する可能性。

インフレ率＝C×インフレ率（-1）+D×GDP

- インフレ・ファイティングな政策（ルール）を用いた場合には、Cは小さくなるはず。

ルーカス批判

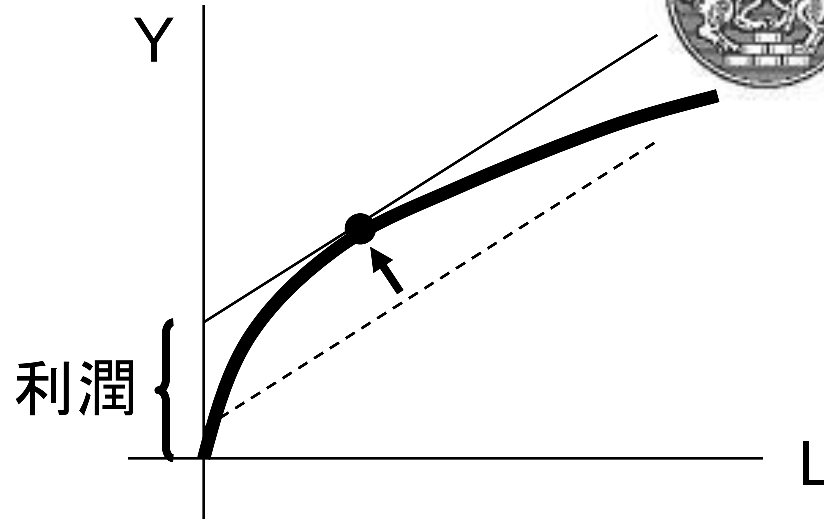
- 政策分析をしたいのに、政策次第でモデルのパラメーターが変化する。これでは政策分析できない（ルーカス批判）。
- 理論モデル（ニュー・ケインジアン・モデル）では、フィリップス曲線のパラメーターは、家計の割引率といった政策に対して不変と考えられるパラメーター（deep parameter）で表現される。
- 政策分析にはミクロ的基盤のある理論モデルが必要不可欠。

- イントロダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー･ケインジアン･モデル
  - 解の唯一性
  - CEEモデル
- 今後の課題

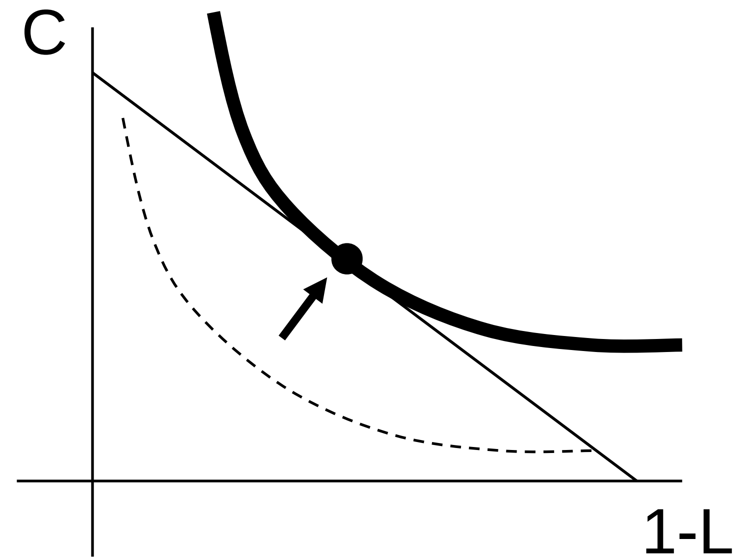
一般均衡モデル

- 方程式が、各経済主体の最適化問題より導出される。
- 各企業は、要素価格を所与として、利潤を最大化するように、生産要素(労働等)を選択。
- 各消費者は、価格を所与として、効用を最大化するように、消費水準と余暇を選択。
- このような問題から求まる均衡(最適選択の結果としての需要と供給をバランスする均衡)を競争均衡と呼ぶ。

- 企業の問題: $\max_L \Pi = PY - WL$ s.t. $Y = AL^{\alpha}$



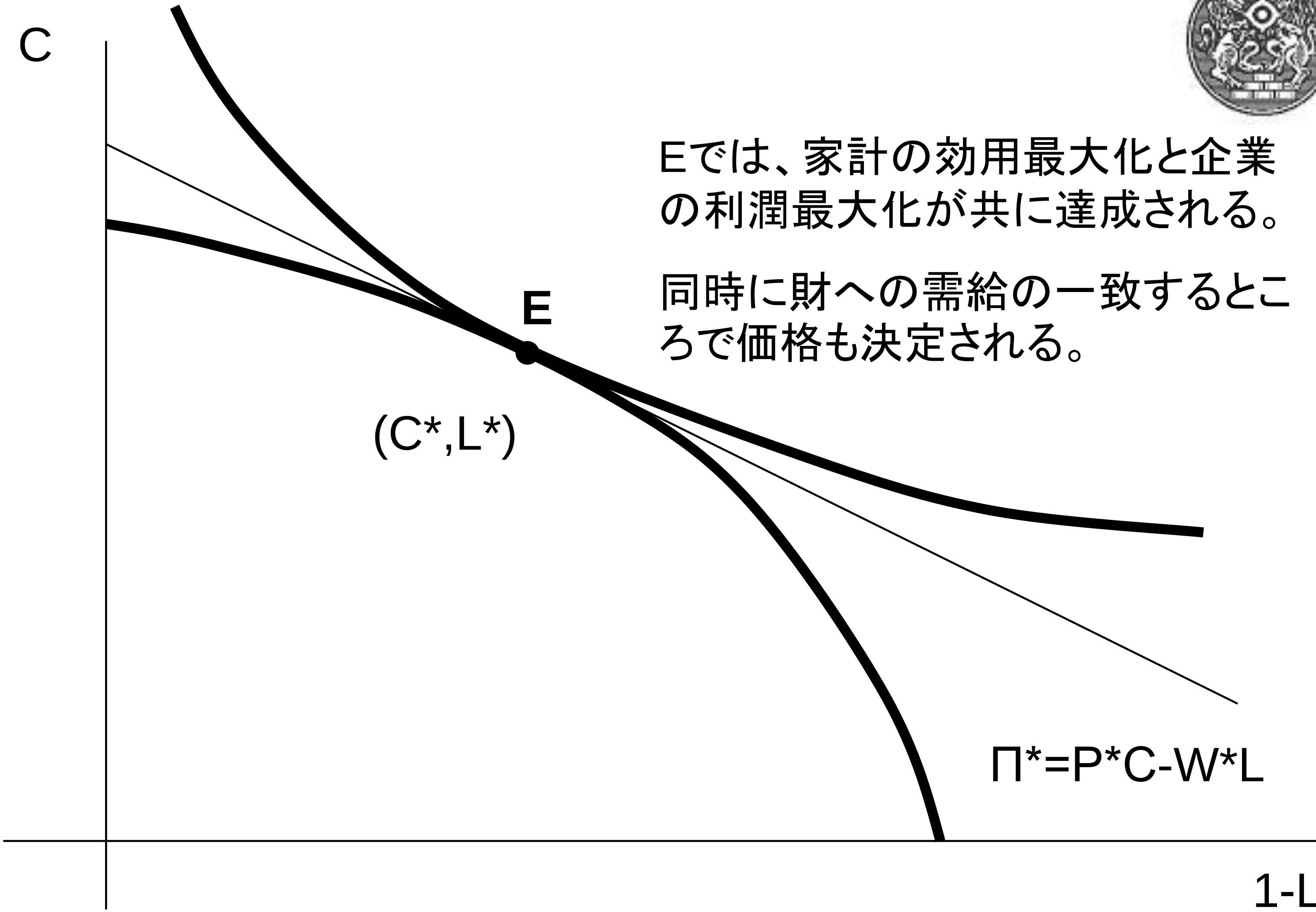
- 家計の問題: $\max_{C,L} U = u(C) - v(L)$ s.t. $PC = WL + \Pi$

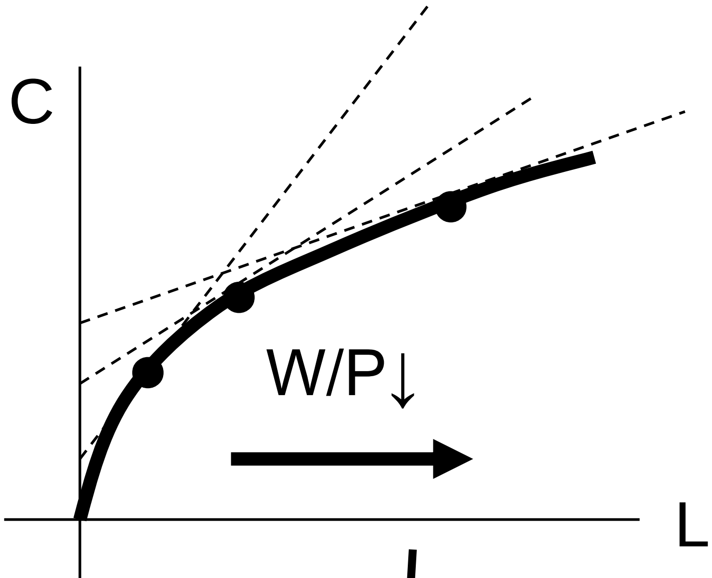


- 財市場均衡: $Y = C$

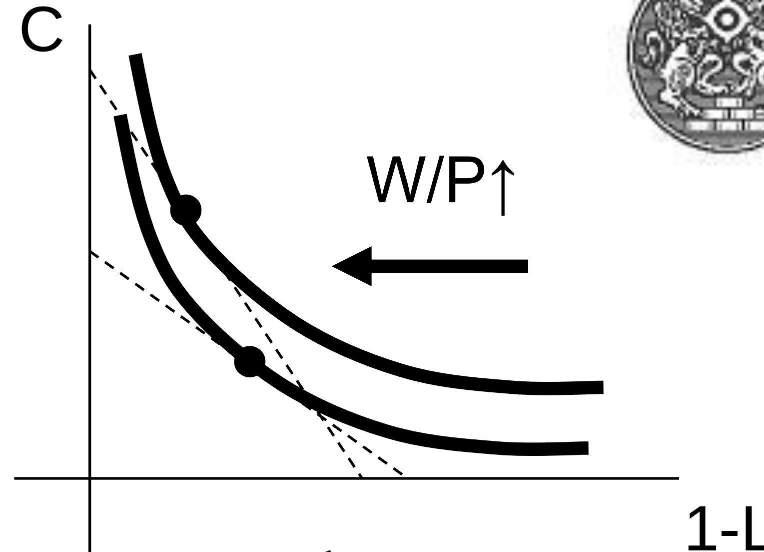
Eでは、家計の効用最大化と企業の利潤最大化が共に達成される。

同時に財への需給の一致するところで価格も決定される。

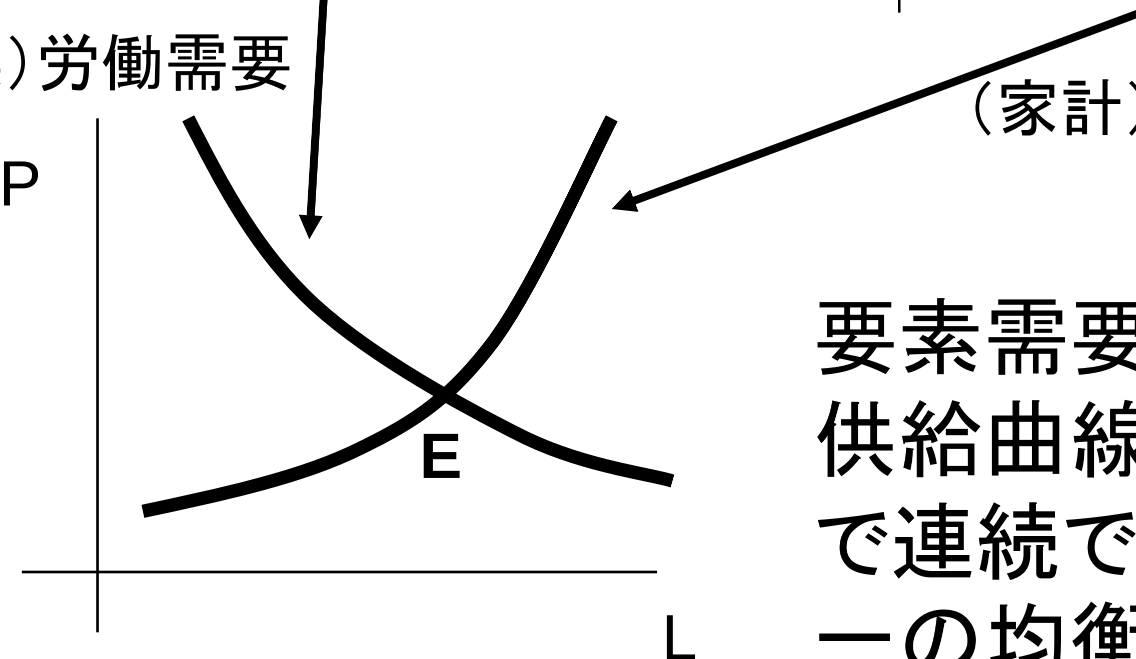




（企業）労働需要



（家計）労働供給



要素需要曲線と要素供給曲線が、単調的で連続であれば、唯一の均衡が定まる。

- イントロダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー･ケインジアン･モデル
  - 解の唯一性
  - CEEモデル
- 今後の課題および発展

新古典派成長モデル

- 社会計画者が、経済主体の効用を最大化するような経済を考える。
- 一見、非現実的にみえるが、経済に歪み（Distortion）や外部性がない場合には、このような社会計画者の配分と、それぞれの主体が自身の効用を最大化するように行動した結果として得られる競争均衡の配分は等しくなる。

社会計画者の問題

- 社会計画者は、以下のように定義される社会全体の効用を

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(C_t) - v(h_t) \right]$$

以下の資源制約式と資本遷移式（と初期条件）の下、最大化する。

$$C_t + I_t \leq f(K_t, h_t)$$

$$K_{t+1} = (1-\delta) K_t + I_t$$

関数形の設定

- 消費からくる効用と、労働からの限界不効用、および生産関数について、以下のような関数形を想定。

$$u(C_t) = \frac{C^{1-\sigma}{}_t}{1-\sigma}$$

$$v(h_t) = \chi \frac{h_t^2}{2}$$

$$f(K_t, h_t) = K_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$$

モデル

- １階の必要条件（必要十分条件となるが、これには別途証明が必要）より、以下の3式よりなるモデルが構築される。

$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = K_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$$

$$\chi h_t = (1-\alpha) C_t^{-\sigma} K_t^{\alpha} h_t^{-\alpha}$$

$$C_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[(1-\delta) + \alpha K_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha} \right]$$

定常状態

- このモデルは安定的であるため（証明については後述）、経済は、以下で定義される定常状態に収斂する。

$$\frac{C}{K}+\delta=\left(\frac{K}{h}\right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{1}{\beta}-1+\delta=\alpha\left(\frac{K}{h}\right)^{\alpha-1}$$

$$\chi h=(1-\alpha)C^{-\sigma}\left(\frac{K}{h}\right)^{\alpha}$$

モデルの解法

- すべての内生変数を、非線形の状態変数よるなる関数で表現することによって、解を求める方法もある（この場合、価値関数、すなわち解の唯一性を縮小写像で証明）が、推定等を行う場合には、モデルを定常状態周りで線形対数近似し、これを状態空間表現した上で、内生変数を線形の状態変数よりなる関数で表現する場合が多い。

$$\hat{X}_t \equiv \log\left(\frac{X_t}{X}\right) \approx \frac{X_t - X}{X}$$

対数線形近似モデル

- 対数線形近似後のモデルは以下の3式で表現される。

$$\frac{C}{Y}\hat{C}_t + \frac{K}{Y}\hat{K}_{t+1} + (1-\delta)\frac{K}{Y}\hat{K}_t = \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{h}_t$$

$$(1+\alpha)\hat{h}_t = -\sigma\hat{C}_t + (1-\alpha)\hat{K}_t$$

$$-\sigma\hat{C}_t = -\sigma\beta\left[(1-\delta) + \alpha\frac{Y}{K}\right]E_t\hat{C}_{t+1} + \alpha\beta\left[(\alpha-1)\hat{K}_{t+1} + (1-\alpha)E_t\hat{h}_{t+1}\right]$$

新古典派成長モデルの解

- 上記モデルは一つの式に集約可能。

$$\Gamma_1 \hat{K}_{t+2} + \Gamma_2 \hat{K}_{t+1} + \Gamma_3 \hat{K}_t = 0$$

- 以下に変形（r_1、r_2は2次方程式の根）。

$$\Gamma_1 \hat{K}_{t+2} + \Gamma_2 L \hat{K}_{t+2} + \Gamma_3 L^2 \hat{K}_{t+2} = \left(\Gamma_1 + \Gamma_2 L + \Gamma_3 L^2\right)\hat{K}_{t+2} = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{r_1} L\right)\left(1 - \frac{1}{r_2} L\right)\hat{K}_{t+2} = 0$$

- r_1の絶対値のみが1より大きければ、解が求まる。

$$\hat{K}_{t+2} = \frac{1}{r_1}\hat{K}_{t+1}$$

- イントロダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー･ケインジアン･モデル
  - 解の唯一性
  - CEEモデル
- 今後の課題

ニュー・ケインジアン・モデル

- 価格が緩やかにしか調整されないことを仮定。
- この結果、将来価格を変更できない可能性も考慮しながら、企業は足許の価格を設定。
- 例えば、企業が、来期は価格を変更できないと予測すると、今期の価格を、今期と来期の限界費用を基に設定（フォワード・ルッキングな価格設定）。
- 詳細は、例えば、加藤（2006）を参照。

モデル

- 金利が上昇すると、需要が低下することを表現した動学IS曲線（オイラー方程式）

$$x_t = x_{t+1} - \sigma^{-1}\left(i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t^n\right)$$

- 需要が増加すると、物価が上昇することを表現したフィリップス曲線

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa x_t$$

- 物価が上昇した場合に、金利を引き上げるような政策ルール（テイラー・ルール）

$$i_t = \theta \pi_t$$

状態空間表現

- 上記のモデルは、以下の状態空間表現が可能。

$$\begin{pmatrix} \sigma & \theta \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ \pi_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r_t^n$$

$$\begin{pmatrix} x_t \\ \pi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \theta \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma & \theta \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r_t^n$$

$$= \frac{1}{\sigma+\theta} \begin{pmatrix} \sigma & 1-\theta\beta \\ \kappa\sigma & \kappa+\sigma\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma+\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \kappa \end{pmatrix} r_t^n$$

$$= \frac{1}{\sigma+\theta} \Omega \begin{pmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma+\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \kappa \end{pmatrix} r_t^n$$

- Ωの固有値が2つとも1より小さければ（左辺と右辺が逆の場合には、1より大きければ）、合理的期待均衡が存在する。

- イントロダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー･ケインジアン･モデル
  - 解の唯一性
  - CEEモデル
- 今後の課題

解の唯一性

- 線形モデルは、すべて、以下のような状態空間表現が可能。

$$\begin{pmatrix} E_t \Phi_{t+1} \\ \Psi_t \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \Phi_t \\ \Psi_{t-1} \end{pmatrix}$$

- 以下のような固有値分解

$$\Gamma = T \Lambda T^{-1}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \left[\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{21} \\ t_{22} \end{pmatrix} \right]$$

を用いると、以下のように変形される

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_t\Phi_{t+1} \\ \Psi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_t \\ \Psi_{t-1} \end{pmatrix}$$

- ここで、$|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1$であったとすると、1行目は発散してしまうため、解の存在には、$t_{22}\Phi_t - t_{21}\Psi_{t-1} = 0$が満たされなくてはならない。
- 一方、2行目については、上条件を用いると、

$$\left(t_{11} - t_{21}\frac{t_{21}}{t_{22}}\right)\Psi_t = \lambda_2\left(t_{11} - t_{21}\frac{t_{21}}{t_{22}}\right)\Psi_{t-1}$$

が導出される。

- 上記2式:

$$t_{22}\Phi_t - t_{21}\Psi_{t-1} = 0$$

$$\left(t_{11} - t_{21}\frac{t_{21}}{t_{22}}\right)\Psi_t = \lambda_2\left(t_{11} - t_{21}\frac{t_{21}}{t_{22}}\right)\Psi_{t-1}$$

より、状態変数(Ψ)の初期値を用いれば、定常状態に収斂するような合理的期待均衡、すなわち、解を求めることができる。

- フォワード・ルッキング変数の数と1より大きい固有値の数が一致すると、ユニークな合理的期待均衡が求まる(主観的割引率の存在により、ユニークに解が決まることが多い)。

- イントロダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー･ケインジアン･モデル
  - CEEモデル
- 今後の課題

CEEモデル

- データ説明力の高さから、中央銀行をはじめとした政策機関では、CEEモデルをベースにしたコア・モデルがとして用いられている。
- 消費、および、投資のショックに対する緩やかな反応を表現するために、消費の習慣形成（過去の消費に今期の消費は影響を受ける）、投資成長率の調整コスト（前期に比べ投資を増減させるとコストがかかる）等が組み込まれている。

家計の問題

- 各家計iは、以下のように定義される効用を

$$U_{i,t} = \log\left(C_{i,t} - bC_{i,t-1}\right) - \psi_L \frac{h_{i,t}^{1+\sigma_L}}{1+\sigma_L},$$

予算制約式、資本の遷移式、労働需要曲線を制約に最大化する。

$$\frac{B_{i,t+1}}{P_t} = R^n_{t+1}\frac{B_{i,t}}{P_t} + (1+\tau_W)\frac{W_{i,t}}{P_t}h_{i,t}\left\{1 - \frac{\zeta_w}{2}\left[\frac{W_{i,t}}{\mu\exp(u_t)W_{i,t-1}} - 1\right]^2\right\}$$
$$+ r_t^K K_{i,t} + D_{i,t} - C_{i,t} - I_{,it} - T_{i,t},$$

$$K_{i,t+1} = (1-\delta)K_{i,t} + \left[1 - S\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,t-1}}\right)\right]I_{i,t},$$

$$h_{j,t} = \left(\frac{W_{j,t,}}{W_t}\right)^{-\theta_h} h_t$$

企業の問題

- 各企業jは、以下のように定義される利潤を

$$D_{j,t} = (1+\tau)\frac{P_{j,t,}}{P_t}Y_{j,t} - \phi_t Y_{j,t} - \frac{\zeta_p}{2}\left(\frac{P_{j,t}}{P_{j,t-1}} - 1\right)^2 Y_t$$

以下の財需要曲線の下で最大化するように、個別価格を設定する。

$$Y_{j,t} = \left(\frac{P_{j,t,}}{P_t}\right)^{-\theta_p} Y_t$$

中央銀行

- 中央銀行は、以下のような政策ルールに基づき、金利を設定する。

$$R_{t+1}^{n} = \rho R_{t-1}^{n} + (1-\rho)\left[R + \eta\left(\frac{\mathrm{E}_t P_{t+1}}{P_t} - 1\right) + \eta_y\left(\frac{Y_t}{Y_t^{+}} - 1\right)\right]$$

対数線形近似モデル

$$
\begin{aligned}
&h^{1-\alpha}\left(\frac{k}{\mu}\right)^{\alpha}\left[(1-\alpha)\,z_t+(1-\alpha)\,\widehat{h}_t+\alpha\widehat{k}_t-\alpha u_t\right]-c\widehat{c}_t-\widehat{i}\widehat{i}_t=0,\\
&-\widehat{k}_{t+1}+\frac{(1-\delta)}{\mu}\left(\widehat{k}_t-u_t\right)+\frac{i}{k}\widehat{i}_t=0,\\
&\left(c-\frac{bc}{\mu}\right)^{-2}\left[-c\widehat{c}_t+\frac{bc}{\mu}\widehat{c}_{t-1}-\frac{bc}{\mu}u_t\right]-\widetilde{\lambda}\widehat{\widetilde{\lambda}}_t\\
&+b\beta\,(\mu-b)^{-2}\,c^{-1}\left(\mu\mathrm{E}_t\widehat{c}_{t+1}-b\widehat{c}_t+\mu\mathrm{E}_t u_{t+1}\right)=0,\\
&-\widehat{w}_t+\widehat{\phi}_t+(1-\alpha)\,z_t-\alpha\widehat{h}_t+\alpha\widehat{k}_t-\alpha u_t=0,\\
&-\widehat{\pi}_t-\widehat{\pi}_t^{W}+\beta\mathrm{E}_t\widehat{\pi}_{t+1}+\beta\mathrm{E}_t\widehat{\pi}_{t+1}^{W}+\frac{\theta_h-1}{\zeta_w}\widehat{\varphi}_t=0,\\
&-\widehat{\varphi}_t+\sigma_L\widehat{h}_t-\widehat{\widetilde{\lambda}}_t-\widehat{w}_t=0,\\
&-\widehat{r}_t^{K}+\widehat{\phi}_t+(1-\alpha)\,\widehat{z}_t+(1-\alpha)\,\widehat{h}_t+(\alpha-1)\,\widehat{k}_t+(1-\alpha)\,u_t=0,\\
&-\widehat{P}_{K',t}+\mathrm{E}_t\widehat{\widetilde{\lambda}}_{t+1}-\mathrm{E}_t u_{t+1}-\widehat{\widetilde{\lambda}}_t+\frac{\beta r^{K}}{\mu}\mathrm{E}_t\widehat{r}_{t+1}^{K}+\frac{\beta(1-\delta)}{\mu}\mathrm{E}_t\widehat{P}_{K',t+1}=0,\\
&\widehat{P}_{K',t}-(1+\beta)\,S''\mu^2\widehat{i}_t+\mu^2S''\widehat{i}_{t-1}+\beta S''\mu^2\mathrm{E}_t\widehat{i}_{t+1}=0,\\
&-\widehat{\pi}_t+\beta\mathrm{E}_t\widehat{\pi}_{t+1}+\frac{\theta_p}{\zeta_p}\widehat{\phi}_t=0,\\
&-R^n\widehat{R}_t^n+\rho R^n\widehat{R}_{t-1}^n+(1-\rho)\,\eta\mathrm{E}_t\widehat{\pi}_{t+1}+(1-\rho)\,(1-\alpha)\,\eta_y z_t\\
&+(1-\rho)\,(1-\alpha)\,\eta_y\widehat{h}_t+(1-\rho)\,\alpha\eta_y\widehat{k}_t=0,\\
&\mathrm{E}_t\widehat{\pi}_{t+1}-\widehat{R}_t^n-\mathrm{E}_t\widehat{\widetilde{\lambda}}_{t+1}+\widehat{\widetilde{\lambda}}_t+\mathrm{E}_t\widehat{u}_{t+1}=0,\\
&-\widehat{\pi}_t^{W}+\widehat{w}_t-\widehat{w}_{t-1}=0.
\end{aligned}
$$

- 状態空間表現が可能。

- イントロダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー･ケインジアン･モデル
  - CEEモデル
- 今後の課題

今後の課題

- 金融市場の不完全性の取り組み：Bernanke et al(1999)、Kiyotaki and Moore(1997)
- 失業の組み込み：Gertler and Trigari (2009)、Blanchard and Gali (2007)
- ニュース・ショックの組み込み：Schmitt-Grohe and Uribe (2008)、Fujiwara et al (2008)
- 多国間モデルの推定： Lubik and Schorfheide (2005)
- 非線形推定：Rubio-Ramirez and Fernandez-Villarverde (2005)

参考文献

- 加藤、2006、*現代マクロ経済学講義-動学的一般均衡モデル*、東洋経済新報社
- Bernanke, Gertler and Gilchrist, 1999, “The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework,” Handbook of Macroeconomics
- Blanchard and Gali, 2007, “Real Wage Rigidities and the New Keynesian Model,” Journal of Money, Credit and Banking
- Christiano, Eichenbaum and Evans, 2005, “Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy,” *Journal of Political Economy*
- Fujiwara, Hirose and Shintani, 2008, “Can News Be a Major Source of Aggregate Fluctuations?” BOJ-IMES Discussion Paper
- Gertler and Trigari, 2009, “Unemployment Dynamics with Staggered Nash Wage Bargaining” Journal of Political Economy (forthcoming)
- Kiyotaki and Moore, 1997, “Credit Cycles,” Journal of Political Economy
- Lubik and Schorfheide, 2005, “A Bayesian Look at New Open Economy Macroeconomics,” NBER Macroeconomics Annual
- Rubio-Ramirez and Fernandez-Villarverde, 2005, “Estimating Dynamic Equilibrium Econoies: Linear versus Nonlinear Likelihood,” Journal of Applied Econometrics
- Schmitt-Grohe and Uribe, 2008, “What’s News in Business Cycles,” NBER Working Paper